

## Тема: Орбіти. Лема Бернсайда про кількість орбіт та її застосування

### План

1. Орбіти
2. Лема Бернсайда

Нехай  $X$  – деяка скінченна множина елементів,  $S(X)$  – група всіх бієктивних відображень множини  $X$  у себе,  $G$  – певна група. Під реалізацією  $G$  у  $S(X)$  розумітимемо будь-який гомоморфізм  $\tau : G \rightarrow S(X)$ . Для простоти позначень замість  $\tau(g)$ , де  $g \in G$ , будемо писати  $\tau_g$ , а замість  $\tau_g(x)$ , де  $x \in X$ , –  $gx$ . Дві точки  $x_1, x_2 \in X$  називають еквівалентними відносно групи  $G$ , що діє на множині  $X$  ( $G$ -еквівалентними), якщо існує  $g \in G$  таке, що  $x_2 = g x_1$ . Вивчаючи дію групи на множині можна прийти до висновку, що  $G$ -еквівалентність є відношенням еквівалентності на  $X$ . Тобто вона має наступні властивості: рефлексивність, симетричність і транзитивність. Отже, відношення  $G$ -еквівалентності розбиває множину  $X$  на класи еквівалентності, які називають  $G$ -орбітами. Орбіту, що містить елемент  $x_0 \in X$  будемо позначати  $G(x_0)$ , тобто  $G(x_0) = \{gx_0 \mid g \in G\}$ . Якщо  $H$  – підгрупа групи  $G$ , то лівим суміжним класом  $G$  в  $H$  називають множину  $GH$  усіх елементів вигляду  $gh$ , де  $g$  – фіксований елемент з  $G$ , а  $h \in H$ , тобто  $GH = \{gh \mid h \in H\}$ , а правим суміжним класом  $HG$  називають множину  $HG = \{hg \mid h \in H\}$ .

**Лема (лема Бернсайда):** Нехай  $X$  – скінченна множина елементів;  $G$  – скінченна група, що діє на  $X$ ;  $N(g)$  – кількість елементів з  $X$ , які залишаються на місці при дії  $g$ , тобто  $N(g) = |\{x \in X \mid gx = x\}|$ . Тоді кількість  $G$ -орбіт можна визначити за формулою: 
$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} N(g).$$

Для доведення леми використовують такі твердження:

*твердження 1:* нехай  $x_0 \in X$ ,  $St(x_0) = \{g \in G \mid gx_0 = x_0\}$ ; тоді  $St(x_0)$  – підгрупа групи  $G$  (стаціонарна підгрупа точки  $x_0$ );

*твердження 2:* нехай  $x_0 \in X$ , тоді  $|G(x_0)| = |G| - |St(x_0)|$ ;

*твердження 3:* нехай  $x_0 \in X$ , тоді для  $\forall x \in G(x_0)$   $|St(x)| = |St(x_0)|$ .

### Питання для самоконтролю:

1. Які точки називають еквівалентними ( $G$ -еквівалентними) ?
2. Що представляє собою відношення еквівалентності на множині ?
3. Які властивості має  $G$ -еквівалентність, як відношення ?
4. Що представляє собою група, що діє на множині ?
5. Що називають орбітами ( $G$ -орбітами) у комбінаториці ?
6. Що представляють собою суміжні класи у підгрупі ?
7. Яке відображення називають взаємно однозначним ?
8. Що представляє собою лема Бернсайда про кількість орбіт ?
9. Які твердження використовують для доведення леми Бернсайда ?
10. Для розв'язування яких задач використовують лему Бернсайда ?